Exact Eigenstates of the Pairing-Force-Hamiltonian. II Boson System

AUTHOR(S):

下瀬, 育郎; 秋吉, 康光

Exact Eigenstates of the Pairing-Force-Hamiltonian・II
Boson System

山口大・文理・物理　　下 瀬 育 郎
秋 吉 康 光

（9月17日受理）

§1. まえがき

Part I においては pairing－force－potential をもつ fermion 系を扱ったが，Part II においては Boson 系について考察する．この系については，これまで J. B. Valatin および D. Butler[1]， R. W. Richardson[2] 等によって扱われきた。とくに，Richardson は pair energy の縮退がない場合について厳密解をえた。本論文では，Richardson の方法に従い，しかし上記の条件をもうけることなしに，Part I の fermion 系の場合と同様にして厳密解をえた結果について報告する。

§2. pairing－force－Hamiltonian の eigenstates

N′個の unpaired bosons と N個 pair の bosons とからなる体系を考察し，その Hamiltonian を

$$H = \sum_f \epsilon_f \hat{n}_f + g \sum_f \sum_{f'} \beta_f^+ \beta_{f'} \tag{1}$$

とする。ここに

f ： single－particle quamtum numbers，

ϵ_f ： single－particle energy levels，

g ： pair interaction の強さを表わす constant，

$$\hat{n}_f = b_{f+}^+ b_{f+} + b_{f-}^+ b_{f-} \quad , \tag{2}$$

$$\beta_f^+ = b_{f+}^+ b_{f-}^+ \quad , \qquad \beta_{f'} = b_{f'-} b_{f'+} \quad . \tag{3}$$

(3)

指標 (f+) , (f-) は time reversal に関して共役な状態を表わす。また b^+_{f+} , b^+_{f-} は creation operators を, $b_{f'-}$, $b_{f'+}$ は annihilation operators を表わし, boson 交換関係

$$[\ b_{f\sigma}\ ,\ b^+_{f'\sigma'}\ ] = \delta_{ff'}\delta_{\sigma\sigma'} \quad ,$$

$$[\ b^+_{f\sigma}\ ,\ b^+_{f'\sigma'}\ ] = [\ b_{f\sigma}\ ,\ b_{f'\sigma'}\ ] = 0 \qquad (4)$$

をみたすとする。

$$[\ \beta_f\ ,\ \hat{n}_{f'}\ ] = 2\delta_{ff'}\beta_f \quad , \qquad [\ \hat{n}_f\ ,\ \beta^+_{f'}\ ] = 2\delta_{ff'}\beta^+_f \qquad (5)$$

$$[\ \beta_f\ ,\ \beta^+_{f'}\ ] = \delta_{ff'}(\,1+\hat{n}_f\,) \quad , \qquad (6)$$

$$[\ \beta^+_f\ ,\ \beta^+_{f'}\ ] = [\ \beta_f\ ,\ \beta_f'\ ] = 0$$

が成立する。次の pair creation および annihilation operators を定義する。

$$B^+_i = \sum_f u_i(\,f\,)\beta^+_f \quad , \qquad B_i = \sum_f u_i(\,f\,)\beta_f \quad , \qquad (7)$$

$$i = 1\ ,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ,\ N.$$

明らかに $B^+_i B^+_j = B^+_j B^+_i$. (8)

$u_i(\,f\,)$ は次の $|\psi>$ が H の eigen vector であるようにきめる。unpaired particles に対する eigen vector を $|\phi>$ として,

$$|\psi> = B^+_1 \cdot\cdot\cdot\cdot B^+_N\,|\phi> \quad , \qquad (9)$$

ここに

$$\hat{n}_f\,|\phi> = n_f\,|\phi> \quad , \qquad (10)$$

$$\sum_f n_f = N' \qquad (\text{unpaired}) \quad , \tag{11}$$

また

$$\beta_f \,|\phi> = 0 \quad , \tag{12}$$

$$H\,|\phi> = \sum_f \varepsilon_f n_f \quad . \tag{13}$$

よって

$$\begin{aligned} H\,|\phi> &= HB_1^+ \cdot\cdot\cdot\cdot B_N^+ \,|\phi> \\ &= (\sum_f n_f \varepsilon_f)\,|\psi> + [H, B_1^+ \cdot\cdot\cdot\cdot B_N^+]\,|\phi> \,. \end{aligned} \tag{14}$$

上式右辺第２項は Part Ⅰ の場合と同様に扱って

$$\begin{aligned} [H, B_1^+ \cdot\cdot\cdot\cdot B_N^+]\,|\phi> = \{ &\sum_{i=1}^{N} (\prod_{j\neq i} B_j^+)[H, B_i^+] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ (i\neq j)}}^{N}{}' (\prod_{k\neq i,j} B_k^+)[[H, B_i^+], B_j^+]\}\,|0> \,. \end{aligned} \tag{15}$$

容易に証明できる次の交換関係

$$[\beta_f^+ \beta_{f'}, \beta_{f''}^+] = \delta_{f' f''} \beta_f^+ (1 + \hat{n}_{f'}) \quad , \tag{16}$$

$$[\beta_f^+ \hat{n}_{f'}, \beta_{f''}^+] = \delta_{f' f''} 2 \beta_f^+ \beta_{f'}^+ \tag{17}$$

および(5)，(6)を用いて

$$\begin{aligned} [H, B_i^+] = &\sum_f 2\varepsilon_f u_i(f) \beta_f^+ \\ &+ g \sum_f \sum_{f'} \beta_f^+ u_i(f')(1 + \hat{n}_{f'}) \quad , \end{aligned} \tag{18}$$

$$[[H, B_i^+], B_j^+] = 2g \sum_f \sum_{f'} \beta_f^+ u_i(f') u_j(f') \beta_{f'}^+ \tag{19}$$

をうる。

次にHの固有値Eを

$$E = \sum_f n_f \varepsilon_f + \sum_{i=1}^{N} E_i \tag{20}$$

とおくと，

$$(H - E)|\psi> = \sum_{i=1}^{N} (\prod_{j\neq i} B_j^+) \sum_f \beta_f^+ \{(2\varepsilon_f - E_i) u_i(f)$$

$$+ g \sum_{f'} u_i(f')(1 + \hat{n}_{f'})\} |\phi>$$

$$+ g \sum_{\substack{i,j \\ (i\neq j)}}^{N}{}' (\prod_{k\neq i,j} B_k^+) \sum_f \beta_f^+ \{\sum_f u_i(f') u_j(f') \beta_{f'}^+\} |\phi> \tag{21}$$

更に $<\psi | H - E | \psi> = 0$ の関係から

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_f [\{(2\varepsilon_f - E_i) u_i(f)^2$$

$$+ g u_i(f) \sum_{f'} u_i(f')(1 + n_{f'})\} \prod_{j\neq i} (\sum_{f''} u_j(f'')^2)$$

$$+ g u_i(f) \sum_{f'} u_i(f') \sum_{j\neq i}^{N} \{u_j(f')^2 \prod_{k\neq i,j} (\sum_{f''} u_k(f'')^2)\}] = 0 \tag{22}$$

をうる。ここに

$$\hat{n}_{f'} |\phi> = n_{f'} |\phi> \quad .$$

これから

$$(2\varepsilon_f - E_i) u_i(f) + g \sum_{f'} u_i(f')(1 + n_{f'})$$

$$+ g \sum_{f'} u_i(f') \sum_{j\neq i}^{N} \frac{u_j(f')^2}{\sum_{f''} u_j(f'')^2} = 0 \quad , \tag{23}$$

$$i = 1, \cdots\cdots, N.$$

上式左辺の第２項，第３項は指標 i だけによるから

$$u_i(f) = \frac{-gC_i}{2\varepsilon_f - E_i} \tag{24}$$

とおける。ここに

$$C_i = \sum_{f'} u_i(f')(1+n_{f'}) + \sum_{f'} u_i(f') \sum_{j \neq i}^{N} \frac{u_j(f')^2}{\sum_{f''} u_j(f'')^2} \,. \tag{25}$$

よって

$$1 + g\sum_f (2\varepsilon_f - E_i)^{-1}(1+n_f)$$

$$+ g\sum_f (2\varepsilon_f - E_i)^{-1} \sum_{j \neq i}^{N} \frac{(2\varepsilon_f - E_j)^{-2}}{\sum_{f'}(2\varepsilon_{f'} - E_j)^{-2}} = 0 \,, \tag{26}$$

$$i = 1, \cdots\cdots, N.$$

これから pair energy E_i $(i = 1, \cdots\cdots, N)$ が厳密に決められる。

§3. 結　び

Richardson[2] は $u_i(f')u_j(f')$ の項を $u_i(f')$ および $u_j(f')$の 1次結合で表わし

$$u_i(f')u_j(f') = M_{ij}u_i(f') + M_{ji}u_j(f')$$

とおいた。このため $E_i \neq E_j$ $(i \neq j)$ という条件が入ってき，また (26)式に相当する式がやや異った形でえられた (Richardson の論文 (2・29)).

本論文 (26)式には上記の条件は課せられていない。

文　献

1) J. G. Valatin and D. Butler, Nuovo Cimento 10 (1958) 37.

2) R. W. Richardson, J. Math. Phys. 9 (1968) 1327.